第28卷 第3期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 28 No. 3
2011年06月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　June 2011

文章编号:1005-3085(2011)03-0393-08

非奇异H-矩阵的新判据

江　如

(广东海洋大学理学院，湛江　524088)

摘　要: 非奇异H-矩阵在矩阵分析和数值代数的研究中具有重要作用. 本文利用广义α-对角占优矩阵、不可约α-对角占优矩阵和具非零元素链α-对角占优矩阵的概念和性质，通过对矩阵行标作划分的方法，首先给出了非奇异H-矩阵的两个新的判定条件. 然后进一步将所得结果应用于比较矩阵和转置比较矩阵的和，得到了另一个更为实用的判据. 最后，用数值例子说明了所给结果的有效性.

关键词: 非奇异H-矩阵；比较矩阵；α-对角占优矩阵；不可约矩阵；非零元素链

分类号: **AMS**(2000) 15A57　　**中图分类号**: O151.21　　**文献标识码**: A

1　引言和预备知识

非奇异H-矩阵是一类重要的矩阵，它们在矩阵论、数学物理、控制论、电力系统理论等领域中都有广泛应用. 本文利用文献[1,2]的思想，给出了非奇异H-矩阵的一些新的判定条件，改进和推广了文献[3]的结果.

用$C^{n\times n}$, $R^{n\times n}$分别表示所有n阶复矩阵及实矩阵的集合，定义$N=\{1,2,\cdots,n\}$. 若存在$N_1,N_2,\cdots,N_k\subset N$，满足$N_i\cap N_j=\emptyset$, $i\neq j$，对任意的$i,j\in N$，且$\cup_{i=1}^{k}N_i=N$, 则称$N_1,N_2,\cdots,N_k$为集合N的划分，记为$N=N_1\oplus N_2\oplus\cdots\oplus N_k$. 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，用$A^*$表示矩阵$A$的共轭转置，记

$$R_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\quad S_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ji}|,\quad i,j\in N.$$

定义1　设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若对任意的$i\in N$，有$|a_{ii}|>R_i(A)$，则称$A$为严格对角占优矩阵；若存在正对角矩阵$X$，使得$AX$是严格对角占优的，则称$A$为非奇异H-矩阵，记为$A\in\tilde{D}$.

定义2　设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若存在$\alpha\in[0,1]$，使得对任意的$i\in N$，有$|a_{ii}|>\alpha R_i(A)+(1-\alpha)S_i(A)$，则称$A$为严格$\alpha$-对角占优矩阵；若存在正对角矩阵$X$，使得$AX$是严格$\alpha$-对角占优的，则称$A$为广义$\alpha$-对角占优矩阵.

定义3　设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，存在$\alpha\in[0,1]$，使对任意的$i\in N$，有$|a_{ii}|\geq\alpha R_i(A)+(1-\alpha)S_i(A)$，且上式中至少有一个严格不等式成立. 若$A$不可约，则称$A$为不可约$\alpha$-对角占优矩阵；若对上式中每一个等式成立的下标$i$，都存在非零元素链$a_{ij_1}a_{j_1j_2}\cdots a_{j_{k-1}j_k}\neq 0$，满足$|a_{j_kj_k}|>\alpha R_{j_k}(A)+(1-\alpha)S_{j_k}(A)$，则称$A$为具非零元素链$\alpha$-对角占优矩阵.

定义4　记

$$Z_n=\big\{A=(a_{ij})\in R^{n\times n}:a_{ij}\leq 0,i\neq j,\forall\, i,j\in N\big\},\quad A=(a_{ij})\in Z_n,$$

收稿日期: 2009-06-23.　**作者简介**: 江如(1973年7月生)，女，讲师. 研究方向：数值代数.

若 A^{-1} 存在且 $A^{-1} \geq 0$，则称 A 为非奇异M-矩阵；若对任意的 $i \in N$，有 $a_{ii} > 0$，则称 A 为L-矩阵.

记 $M(A) = (m_{ij}) \in R^{n\times n}$ 为 A 的比较矩阵，其中

$$m_{ii} = |a_{ii}|, \quad m_{ij} = -|a_{ij}|, \quad i \neq j, \quad \forall\, i,j \in N.$$

熟知，$A \in \tilde{D}$ 当且仅当 $M(A)$ 为非奇异M-矩阵.

引理1[4] 设 $A \in C^{n\times n}$，则 $A \in \tilde{D}$ 当且仅当 A 为广义 α-对角占优矩阵.

引理2[5] 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$，若 A 为不可约 α-对角占优矩阵，或 A 为具非零元素链 α-对角占优矩阵，则 A 为非奇异H-矩阵.

引理3[6] 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$，若 A 为L-矩阵，且 $P = \frac{1}{2}(A + A^*)$ 为非奇异H-矩阵，则 A 为非奇异M-矩阵.

引理4 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$，若 $B = M(A) + M^T(A)$ 为非奇异H-矩阵，则 $A \in \tilde{D}$.

证明 因为 $B \in \tilde{D}$，由引理3易得 $M(A)$ 为非奇异M-矩阵，故 $A \in \tilde{D}$.

设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$，由非奇异H-矩阵的定义知，若 $a_{ii} = 0$，则 $A \notin \tilde{D}$，因此，在本文中我们总假设 $a_{ii} \neq 0$. 设 $\alpha \in [0,1]$, $N = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3$ 为 N 的一个划分，其中

$$N_1 = \big\{i \in N : 0 < |a_{ii}| = \alpha R_i(A) + (1-\alpha)S_i(A)\big\},$$

$$N_2 = \big\{i \in N : 0 < |a_{ii}| < \alpha R_i(A) + (1-\alpha)S_i(A)\big\},$$

$$N_3 = \big\{i \in N : |a_{ii}| > \alpha R_i(A) + (1-\alpha)S_i(A)\big\}.$$

由引理1知，若 $N_1 \cup N_2 = \emptyset$，则 $A \in \tilde{D}$；若 $N_3 = \emptyset$，则 $A \notin \tilde{D}$. 故我们总假设：$N_1 \cup N_2 \neq \emptyset$, $N_3 \neq \emptyset$. 此外，规定 $\sum\limits_{t\in\emptyset} \bullet = 0$.

定义

$$x_t = \frac{\alpha R_t(A) + (1-\alpha)S_t(A)}{|a_{tt}|}, \quad y_t = \frac{R_t(A) + S_t(A)}{2|a_{tt}|}, \quad \forall\, t \in N.$$

2 主要结果

定理1 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$，若存在 $\alpha \in (0,1]$，使对任意的 $i \in N_2$，恒有

$$|a_{ii}| > \frac{x_i\alpha}{x_i - 1}\Big(\sum_{t\in N_1} |a_{it}| + \sum_{t\in N_2, t\neq i}\Big(1 - \frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}| + \sum_{t\in N_3} x_t|a_{it}|\Big) + (1-\alpha)S_i(A), \tag{1}$$

则 A 为非奇异H-矩阵.

证明 记

$$P_i = \alpha\Big(\sum_{t\in N_1, t\neq i} |a_{it}| + \sum_{t\in N_2}\Big(1 - \frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}| + \sum_{t\in N_3} x_t|a_{it}|\Big) + (1-\alpha)S_i(A), \quad \forall\, i \in N_1,$$

$$Q_i = \alpha\Big(\sum_{t\in N_1} |a_{it}| + \sum_{t\in N_2, t\neq i}\Big(1 - \frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}| + \sum_{t\in N_3} x_t|a_{it}|\Big) + \Big(1 - \frac{1}{x_i}\Big)(1-\alpha)S_i(A), \quad \forall\, i \in N_2.$$

由 $N_i\,(i = 1,2,3)$ 的定义，显然有 $0 < 1 - \frac{1}{x_t} < 1$, $t \in N_2$ 且 $0 < x_t < 1$, $t \in N_3$，故

$$P_i < \alpha R_i(A) + (1-\alpha)S_i(A) = |a_{ii}|, \quad \forall\, i \in N_1. \tag{2}$$

设

$$M_i=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha\sum\limits_{t\in N_3}|a_{it}|}(|a_{ii}|-P_i), & \forall\, i\in N_1,\\[2ex] \dfrac{1}{\alpha\sum\limits_{t\in N_3}|a_{it}|}\Big(\big(1-\frac{1}{x_i}\big)|a_{ii}|-Q_i\Big), & \forall\, i\in N_2,\end{cases}\tag{3}$$

当 $\alpha\sum\limits_{t\in N_3}|a_{it}|=0$ 时，记 $M_i=+\infty$. 由式(1)、(2)知，对任意的 $i\in N_1\cup N_2$，有 $M_i>0$. 因此一定存在充分小的正数 ε，使得

$$0<\varepsilon<\min_{i\in N_1\cup N_2}M_i\le+\infty.\tag{4}$$

故可构造正对角矩阵 $D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，其中

$$d_i=\begin{cases}1, & i\in N_1,\\ 1-\frac{1}{x_i}, & i\in N_2,\\ \varepsilon+x_i, & i\in N_3.\end{cases}$$

设 $B=(b_{ij})=AD$，则对任意的 $i,j\in N$，有 $b_{ij}=d_ja_{ij}$. 下证 B 为严格 α-对角占优矩阵.

对任意的 $i\in N_1$，有：

(i) 当 $\alpha\sum\limits_{t\in N_3}|a_{it}|=0$ 时，即对任意的 $t\in N_3$，有 $a_{it}=0$. 由式(3)得

$$\begin{aligned}\alpha R_i(B)+(1-\alpha)S_i(B)&=\alpha\Big(\sum_{t\in N_1,t\ne i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}\Big(1-\frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}|\Big)+(1-\alpha)S_i(A)\\&<\alpha R_i(A)+(1-\alpha)S_i(A)=|a_{ii}|=|b_{ii}|.\end{aligned}$$

(ii) 当 $\alpha\sum\limits_{t\in N_3}|a_{it}|\ne0$ 时，由式(3)、(4)得

$$\begin{aligned}&\alpha R_i(B)+(1-\alpha)S_i(B)\\&=\alpha\Big(\sum_{t\in N_1,t\ne i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}\Big(1-\frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}(\varepsilon+x_t)|a_{it}|\Big)+(1-\alpha)S_i(A)\\&<\alpha\Big(\sum_{t\in N_1,t\ne i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}\Big(1-\frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}x_t|a_{it}|\Big)+(1-\alpha)S_i(A)+M_i\alpha\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\\&=|a_{ii}|=|b_{ii}|.\end{aligned}$$

对任意的 $i\in N_2$，有：

(i) 当 $\alpha\sum\limits_{t\in N_3}|a_{it}|=0$ 时，即对任意的 $t\in N_3$，有 $a_{it}=0$. 由式(1)得

$$\begin{aligned}&\alpha R_i(B)+(1-\alpha)S_i(B)\\&=\alpha\Big(\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\ne i}\Big(1-\frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}|\Big)+(1-\alpha)\Big(1-\frac{1}{x_i}\Big)S_i(A)\\&<\frac{x_i-1}{x_i}|a_{ii}|=\Big(1-\frac{1}{x_i}\Big)|a_{ii}|=|b_{ii}|.\end{aligned}$$

(ii) 当$\alpha \sum\limits_{t\in N_3} |a_{it}| \neq 0$时，由式(3),(4)得

$$
\begin{aligned}
&\alpha R_i(B) + (1-\alpha)S_i(B)\\
=\ &\alpha\Big(\sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2, t\neq i}\Big(1-\frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}| + \sum_{t\in N_3}(\varepsilon + x_t)|a_{it}|\Big) + (1-\alpha)\Big(1-\frac{1}{x_i}\Big)S_i(A)\\
<\ &\alpha\Big(\sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2, t\neq i}\Big(1-\frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}| + \sum_{t\in N_3}x_t|a_{it}|\Big) + (1-\alpha)\Big(1-\frac{1}{x_i}\Big)S_i(A) + M_i\alpha\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\\
=\ &\Big(1-\frac{1}{x_i}\Big)|a_{ii}| = |b_{ii}|.
\end{aligned}
$$

对任意的$i \in N_3$，因为对任意的$t \in N_2$，当$x_t > 1$时，$0 < 1-\frac{1}{x_t} < 1$，且对任意的$t \in N_3$，$0 < x_t < 1$，所以有

$$
R_i(A) - \sum_{t\in N_1}|a_{it}| - \sum_{t\in N_2}\Big(1-\frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}| - \sum_{t\in N_3, t\neq i}x_t|a_{it}| > 0, \quad \forall\, i\in N_3.
$$

由N_3的定义，显然又有

$$
|a_{ii}| - \alpha\sum_{t\in N_3, t\neq i}|a_{it}| - (1-\alpha)S_i(A) > 0, \quad \forall\, i\in N_3.
$$

故有

$$
\begin{aligned}
&|b_{ii}| - \big(\alpha R_i(B) + (1-\alpha)S_i(B)\big)\\
=\ &(\varepsilon + x_i)|a_{ii}| - \alpha\sum_{t\in N_1}|a_{it}| - \alpha\sum_{t\in N_2}\Big(1-\frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}|\\
&-\alpha\sum_{t\in N_3, t\neq i}(\varepsilon + x_t)|a_{it}| - (1-\alpha)(\varepsilon + x_i)S_i(A)\\
=\ &\varepsilon\Big(|a_{ii}| - \alpha\sum_{t\in N_3, t\neq i}|a_{it}| - (1-\alpha)S_i(A)\Big) + x_i|a_{ii}|\\
&-\alpha\Big(\sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2}\Big(1-\frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}| + \sum_{t\in N_3, t\neq i}x_t|a_{it}|\Big) - (1-\alpha)x_iS_i(A)\\
>\ &\alpha\Big(R_i(A) - \sum_{t\in N_1}|a_{it}| - \sum_{t\in N_2}\Big(1-\frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}| - \sum_{t\in N_3, t\neq i}x_t|a_{it}|\Big)\\
&+(1-\alpha)S_i(A) - (1-\alpha)x_iS_i(A) > (1-\alpha)(1-x_i)S_i(A) \geq 0.
\end{aligned}
$$

即

$$
|b_{ii}| > \alpha R_i(B) + (1-\alpha)S_i(B), \quad \forall\, i\in N_3.
$$

综上所述

$$
|b_{ii}| > \alpha R_i(B) + (1-\alpha)S_i(B), \quad \forall\, i\in N,
$$

即 $B = AD$ 为严格 α-对角占优矩阵. 所以 A 为广义 α-对角占优矩阵，由引理1得 A 为非奇异 H-矩阵.

注 1 当 $\alpha = 1$ 时，此即为文献 [1] 的定理 1，故定理 1 包含了文献 [1] 的定理 1.

定理 2 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, $\alpha \in (0,1]$，记

$$I(A) = \Big\{i \in N_2 : |a_{ii}| = \frac{x_i\alpha}{x_i - 1}\Big(\sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2, t\neq i}\Big(1 - \frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}| + \sum_{t\in N_3}x_t|a_{it}|\Big) + (1-\alpha)S_i(A)\Big\},$$

若

$$|a_{ii}| \geq \frac{x_i\alpha}{x_i - 1}\Big(\sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2, t\neq i}\Big(1 - \frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}| + \sum_{t\in N_3}x_t|a_{it}|\Big) + (1-\alpha)S_i(A), \quad \forall\, i \in N_2,$$

且 A 还满足如下条件之一：

1) A 不可约；2) 对任意的 $i \in I(A) \neq \emptyset$，都存在非零元素链 $a_{ij_1}a_{j_1j_2}\cdots a_{j_{k-1}j_k} \neq 0$，使得 $j_k \in (N\backslash I(A))$，则 A 为非奇异 H-矩阵.

证明 由 x_t 和 $N_i\,(i = 1,2,3)$ 的定义知，$x_i > 1$, $i \in N_2$; $0 < x_i < 1$, $i \in N_3$. 故可构造正对角矩阵 $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，其中

$$d_i = \begin{cases} 1, & i \in N_1, \\ 1 - \frac{1}{x_i}, & i \in N_2, \\ x_i, & i \in N_3. \end{cases}$$

设 $B = (b_{ij}) = AD$，则对任意的 $i, j \in N$，有 $b_{ij} = d_j a_{ij}$.

对任意的 $i \in I(A) \subseteq N_2$，有

$$\begin{aligned}&\alpha R_i(B) + (1-\alpha)S_i(B)\\ =\ &\alpha\Big(\sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2, t\neq i}\Big(1 - \frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}| + \sum_{t\in N_3}x_t|a_{it}|\Big) + (1-\alpha)\Big(1 - \frac{1}{x_t}\Big)S_i(A)\\ =\ &\Big(1 - \frac{1}{x_i}\Big)|a_{ii}| = |b_{ii}|.\end{aligned}$$

对任意的 $i \in N_1$，有

$$\begin{aligned}&\alpha R_i(B) + (1-\alpha)S_i(B)\\ =\ &\alpha\Big(\sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2, t\neq i}\Big(1 - \frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}| + \sum_{t\in N_3}x_t|a_{it}|\Big) + (1-\alpha)S_i(A)\\ <\ &\alpha R_i(A) + (1-\alpha)S_i(A) = |a_{ii}| = |b_{ii}|.\end{aligned}$$

对任意的 $i \in N_2\backslash I(A)$，有

$$\begin{aligned}&\alpha R_i(B) + (1-\alpha)S_i(B)\\ =\ &\alpha\Big(\sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2, t\neq i}\Big(1 - \frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}| + \sum_{t\in N_3}x_t|a_{it}|\Big) + (1-\alpha)\Big(1 - \frac{1}{x_t}\Big)S_i(A)\\ <\ &\Big(1 - \frac{1}{x_i}\Big)|a_{ii}| = |b_{ii}|.\end{aligned}$$

对任意的$i \in N_3$，有

$$
\begin{aligned}
&|b_{ii}| - \big(\alpha R_i(B) + (1-\alpha)S_i(B)\big) \\
=\ & x_i|a_{ii}| - \alpha\Big(\sum_{t\in N_1}|a_{it}| - \sum_{t\in N_2}\Big(1-\frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}| - \sum_{t\in N_3,t\neq i} x_t|a_{it}|\Big) - (1-\alpha)x_iS_i(A) \\
=\ & \alpha R_i(A) + (1-\alpha)S_i(A) - \alpha\Big(\sum_{t\in N_1}|a_{it}| - \sum_{t\in N_2}\Big(1-\frac{1}{x_t}\Big)|a_{it}| - \sum_{t\in N_3,t\neq i} x_t|a_{it}|\Big) \\
&-(1-\alpha)x_iS_i(A) > (1-\alpha)(1-x_i)S_i(A) \ge 0.
\end{aligned}
$$

总结以上结论知，对任意的$i \in N$，有

$$|b_{ii}| \ge \alpha R_i(B) + (1-\alpha)S_i(B).$$

当A不可约时，则$B = AD$也不可约，故B是不可约α-对角占优矩阵，由引理2有$B \in \tilde{D}$，再由引理1得$A \in \tilde{D}$．当A满足条件(2)时，则$B = AD$为具非零元素链α-对角占优矩阵．由引理2知，$B \in \tilde{D}$，即得$A \in \tilde{D}$.

注2 当$\alpha = 1$时，此即为文献[1]的定理2和定理3，故定理2包含了文献[1]的定理2和定理3．若将定理1应用于矩阵$B = M(A) + M^T(A)$，可以得到下面更为实用的定理3.

设$N = K_1 \oplus K_2 \oplus K_3$为$N$的一个划分，其中

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \big\{i \in N : 0 < 2|a_{ii}| = R_i(A) + S_i(A)\big\}, \\
K_2 &= \big\{i \in N : 0 < 2|a_{ii}| < R_i(A) + S_i(A)\big\}, \\
K_3 &= \big\{i \in N : 2|a_{ii}| > R_i(A) + S_i(A)\big\}.
\end{aligned}
$$

若$K_1 \cup K_2 = \emptyset$，则$B = M(A) + M^T(A)$为严格对角占优矩阵，即得A为非奇异H-矩阵．故我们假设：$K_1 \cup K_2 \neq \emptyset$.

定理3 设$A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$，$K_3 \neq \emptyset$，若存在$\alpha \in (0,1]$，使对任意的$i \in K_2$，恒有

$$
\begin{aligned}
2|a_{ii}| > \frac{y_i}{y_i-1}\alpha\Big[&\sum_{t\in K_1}\big(|a_{it}|+|a_{ti}|\big) + \sum_{t\in K_2,t\neq i}\Big(1-\frac{1}{y_t}\Big)\big(|a_{it}|+|a_{ti}|\big) \\
&+ \sum_{t\in K_3} y_t\big(|a_{it}|+|a_{ti}|\big)\Big] + (1-\alpha)(R_i(A)+S_i(A)),
\end{aligned}
$$

则A为非奇异H-矩阵.

证明 设$B = (b_{ij}) = M(A) + M^T(A)$，则

$$b_{ii} = 2|a_{ii}|, \quad b_{ij} = -|a_{ij}| - |a_{ji}|, \quad i \neq j, \quad i,j \in N,$$

对任意的$i \in N$，有

$$R_i(B) = R_i(A) + S_i(A) = S_i(B),$$

也即有

$$\alpha R_i(B) + (1-\alpha)S_i(B) = R_i(A) + S_i(A).$$

所以，若A满足定理3的条件，也即B满足定理1的条件，故$B \in \tilde{D}$．于是，由引理4可得$A \in \tilde{D}$.

3　数值例子

例　设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 10 & 3.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

取 $\alpha=1$，则

$$N_1=\{1\},\quad N_2=\{2,3\},\quad N_3=\{4,5\},$$
$$x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=1.5,\quad x_4=0.4,\quad x_5=0.5625.$$

此时

$$|a_{22}|=2\not>7.46667=\frac{x_2}{x_2-1}\Big(|a_{21}|+\Big(1-\frac{1}{x_3}\Big)|a_{23}|+x_4|a_{24}|+x_5|a_{25}|\Big),$$

故 (1) 式不成立，也即无法用文献 [1] 的定理 1 去判定.

现取 $\alpha=\frac{3}{11}$，则

$$N_1=\{2\},\quad N_2=\{4\},\quad N_3=\{1,3,5\},$$
$$x_1=\frac{7}{11},\quad x_2=1,\quad x_3=\frac{15}{22},\quad x_4=\frac{14}{11},\quad x_5=\frac{83}{176}.$$

此时

$$|a_{44}|=10>2.534607=\frac{x_4\alpha}{x_4-1}\big(|a_{42}|+x_1|a_{41}|+x_3|a_{43}|+x_5|a_{45}|\big),$$

所以 A 满足本文定理 1 的条件，故可判定 A 为非奇异 H-矩阵.

致谢：作者衷心感谢导师—华南师范大学黎稳教授的悉心指导！

参考文献：

[1] 黄廷祝. 非奇H矩阵的简捷判据[J]. 计算数学，1993, 15(4): 318-328
Huang T Z. Some simple determinate conditions for nonsingular H-matrix[J]. Mathematic Numerica Sinica, 1993, 15(4): 318-328

[2] 江如. 广义对角占优矩阵的新判据[J]. 华南师范大学学报 (自然科学版)，2010, (1): 24-27
Jiang R. New criteria for generalized diagonally dominant matrices[J]. Journal of South China Normal University (Natural Science Edition), 2010, (1): 24-27

[3] 干泰彬，黄廷祝. 非奇异H矩阵的实用充分条件[J]. 计算数学，2004, 26(1): 110-116
Gan T B, Huang T Z. Practical sufficient conditions for nonsingular H-matrices[J]. Mathematic Numerica Sinica, 2004, 26(1): 110-116

[4] 李继成，张文修. H矩阵的判定[J]. 高等学校计算数学学报，1999, 21(3): 264-268
Li J C, Zhang W X. Criteria for H-matrices[J]. Numerical Mathematics: A Journal of Chinese Universities, 1999, 21(3): 264-268

[5] 孙玉祥. 广义对角占优矩阵的充分条件[J]. 高等学校计算数学学报，1997, 19(3): 216-223
Sun Y X. *Sufficient conditions for generalized diagonally dominant matrices[J]. Numerical Mathematics: A* Journal of Chinese Universities, 1997, 19(3): 216-223

[6] 高益明. 矩阵广义对角占优和非奇的判定 (II)[J]. 工程数学学报，1988, 5(3): 12-16
Gao Y M. Criteria of the generalized diagonal dominance and nonsingularity of matrices (II)[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 1988, 5(3): 12-16

New Criteria for Nonsingular H-matrices

JIANG Ru

(School of Sciences, Guangdong Ocean University, Zhanjiang 524088)

Abstract: Nonsingular H-matrices play an important role in the research of matrix analysis and numerical algebra. Based on the concepts and properties of α-diagonally dominant matrices, irreducible α-diagonally dominant matrices and α-diagonally dominant matrices with a nonzero elements chain, two new criteria for nonsingular H-matrices are obtained firstly in this paper according to the partition of the row indices. Secondly, a more practical criterion is also obtained by applying the above results to the sum of the comparison matrix and its transpose. A numerical example is presented to illustrate the effectiveness of the presented criteria.

Keywords: nonsingular H-matrix; comparison matrix; α-diagonally dominant matrix; irreducible matrix; nonzero elements chain

Received: 23 June 2009. **Accepted:** 24 Feb 2010.